# MATEMATICA

## Maturità scientifica

Carlo Felice Manara

*Il candidato svolga, a scelta, due dei seguenti quesiti:*

1. *Presi due vettori* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$ *non paralleli e con lo stesso punto di applicazione O, sia* $\overrightarrow{OA} = 2\cdot\vec{a}$ *e* $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. *Tracciare il vettore* $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ *e congiungere O con C. Il punto P divida il segmento OC in due parti tali che* $\overrightarrow{OP} = 2\cdot\overrightarrow{PC}$. *Dimostrare che i punti A, P e B sono allineati (è allo scopo sufficiente dimostrare che i due vettori* $\overrightarrow{AP}$ *e* $\overrightarrow{PB}$ *sono multipli di uno stesso vettore).*
*Posto* $\vec{a} \perp \vec{b}$ *e* $|\vec{a}| = 1$ *e fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di centro O con ascissa parallela ed equiversa ad* $\vec{a}$ *e ordinata parallela ed equiversa a* $\vec{b}$, *trovare* $|\vec{b}|$ *affinché i due segmenti OC e AB siano perpendicolari.*
*Trovare, in questo caso, le due parabole con asse parallelo all'asse delle y e passanti rispettivamente la prima per O, P ed A e la seconda per B, P e C. Verificare che le due parabole sono tra loro tangenti in P. Calcolare infine l'area della parte finita di piano racchiusa tra le due parabole e l'asse delle y.*

2. *La funzione*
$$f(x) = (2x^3 - 4x)e^{-x^2}$$
*rappresenti, in opportune unità di misura, la forza* $f(x)$ *a cui è soggetto un punto P libero di muoversi lungo l'asse delle x. Sapendo che la forza f è data da*
$$f(x) = -\frac{dE(x)}{dx}$$
*dove* $E(x)$ *è l'energia potenziale, trovare la funzione* $E(x)$ *e rappresentarla avendo posto* $E(0) = -1$.
*Per quali valori di x il punto P è in equilibrio, ossia per quali valori di x la forza è nulla? Per tali valori di x l'energia potenziale quale valore assume?*

3. *Data una circonferenza* $\gamma$ *di raggio unitario e centro O, tracciare una semiretta s uscente da O ed intersecante* $\gamma$ *in un punto Q. Indicato con P un generico punto di s esterno alla circonferenza* $\gamma$, *tracciare da esso le due tangenti alla circonferenza: siano A e B i punti di tangenza. Indicata con x la lunghezza del segmento PQ, trovare il limite per x tendente ad infinito del rapporto*
$$k = \frac{\overline{AQ} + \overline{QB}}{\overline{AB}}.$$
*Studiare quindi la funzione* $y = f(x)$, *dove* $f(x) = k^2$ *e calcolare la superficie della regione di piano delimitata dalla curva e dagli assi cartesiani.*

**Primo quesito.**

1. Svolgiamo anzitutto il quesito seguendo il suggerimento che accompagna l'enunciato. Poniamo

(1) $\overrightarrow{OM} = \vec{a} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$.

In forza delle ipotesi si ha:

(2) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

e quindi, secondo l'enunciato del quesito,

(3) $\overrightarrow{OP} = (2/3)\cdot\overrightarrow{OC} = (2/3)\cdot[\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}]$.

Inoltre si ha:

(4) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}$.

Tenendo conto della (3) si ottiene:

(5) $\overrightarrow{AP} = (2/3)\cdot[\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}]$;
$\overrightarrow{PB} = (1/3)\cdot[\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}]$;

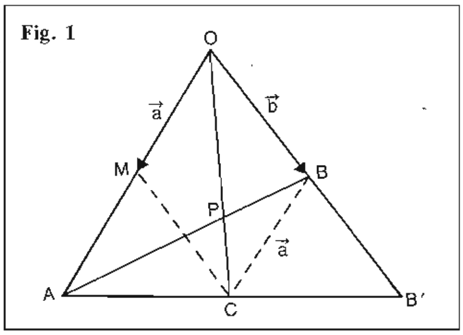
queste relazioni dimostrano quindi che i due vettori AP e PB sono multipli di un medesimo vettore.

**2. Lo svolgimento che abbiamo dato, seguendo il suggerimento** che si legge nell'enunciato del quesito, presuppone che il candidato abbia qualche conoscenza del calcolo con i vettori, e si renda conto del fatto che questi strumenti possono essere utilizzati proficuamente anche in geometria, oltre che in fisica. Forse queste idee, e soprattutto le loro applicazioni pratiche, non sono molto familiari a tutti gli studenti, e non trovano grande posto nella manualistica corrente.
Osserviamo inoltre che il simbolismo, adottato dal testo ministeriale per indicare i vettori (con una piccola freccia sovrapposta), appare inutilmente complicato e macchinoso, anche se è diffuso presso i cultori di fisica. Personalmente a noi sembra più semplice e chiara la convenzione che indica il vettore che ha come primo estremo il punto A e come secondo estremo il punto B con il simbolo «B – A»; come è noto, questo simbolismo ha la sua origine nei lavori di G. Peano, si è diffuso in Italia per opera di C. Burali Forti e R. Marcolongo, ed è stato adottato da molti illustri rappresentanti della meccanica razionale italiana; tra essi ricordiamo Tullio Levi Civita, Ugo Amaldi (sr.) e Bruno Finzi. Tuttavia il simbolismo riguardante i vettori non è ancora unificato su scala internazionale, ed appare quindi inutile stare a discutere sulle convenzioni adottate abitualmente dai cultori della materia.
Tuttavia per svolgere il quesito in parola non è necessario impiegare gli strumenti concettuali ed i simboli del calcolo con i vettori, perché la risposta può essere data in base a considerazioni di geometria molto elementare. A tal fine costruiamo (*Fig. 1*) sulla retta OB il punto B′ tale che sia:

(6) $OB' = 2\cdot OB$.

Allora si ha subito che i due triangoli OAB′, BCB′, in forza dei dati del problema, sono simili, e che quindi i tre punti A, C, B′ sono allineati.

**Fig. 1**



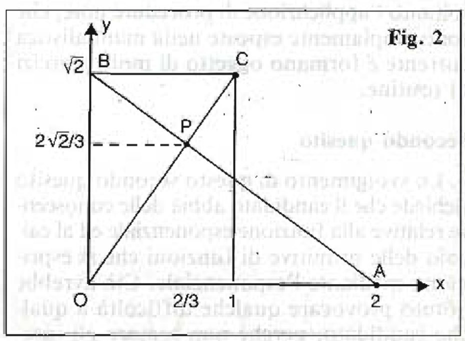

Inoltre AB e OC sono due mediane del triangolo OAB′; indicato provvisoriamente con P′ il punto intersezione delle due mediane, in forza di un noto teorema di geometria elementare, relativo alle mediane di un triangolo, per il punto P′ sussiste la relazione:

(7) $OP' = 2\cdot P'C$; $AP' = 2\cdot P'B$

e di qui si trae che il punto P′ coincide con P; si giunge così a rispondere al quesito in modo del tutto elementare.

**3. La seconda parte del quesito impone che si scelga** un riferimento cartesiano collegato con i vettori, che sono assegnati questa volta in modo particolare. Indicata con b l'ordinata del punto B (*Fig. 2*), le rette OP e AB hanno in questo caso rispettivamente le equazioni:

**Fig. 2**



(8) $y=b\cdot x$ e $y=b-b\cdot x/2$;

la condizione di perpendicolarità si traduce con l'equazione:

(9) $b^2=2.$

La ricerca dell'intersezione conduce facilmente a riconoscere che il punto P ha le coordinate:

(10) $x=2/3;\quad y=2\cdot\sqrt{2}/3.$

Una parabola generica, con asse parallelo all'asse y e passante per O ed A, ha equazione:

(11) $y=k\cdot x\cdot(x-2);$

il valore della costante k si determina imponendo il passaggio per il punto di coordinate (10); si ottiene così

(12) $k=-3\cdot\sqrt{2}/4.$

Con procedura analoga si giunge ad accertare che la parabola per B, C e P ed avente asse parallelo all'asse delle y è rappresentata dall'equazione:

(13) $y=\sqrt{2}+3\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot(x-1)/2.$

Queste due parabole possono essere considerate come i grafici delle due funzioni:

(14) $f(x)=\sqrt{2}\cdot[-3\cdot x^2/4+3\cdot x/2];$
$g(x)=\sqrt{2}\cdot[1+3\cdot x^2/2-3\cdot x/2];$

calcolando le derivate di queste due funzioni per $x=2/3$ si ottiene il valore comune:

(15) $f'=g'=-1/\sqrt{2}.$

Si conclude pertanto che le due parabole sono tangenti in P; inoltre dal segno del termine in $x^2$ nelle due formule (14) si trae che la grafica della funzione f rivolge la sua concavità verso la parte negativa dell'asse y, e quella della funzione g rivolge la concavità verso la parte positiva dello stesso asse. Quindi le due parabole sono in P tangenti esternamente l'una all'altra.
L'area della parte di piano richiesta nell'enunciato si ottiene ponendo:

(16) $F(x) = g(x)-f(x),$

e calcolando il valore dell'integrale definito:

(17) $\int_0^{2/3} F(x)\cdot dx=2\cdot\sqrt{2}/9.$

Si può osservare che questa parte del primo quesito non offre difficoltà, né concettuali, né di calcolo, e che lo svolgimento richiede soltanto l'applicazione di procedure note, che sono ampiamente esposte nella manualistica corrente e formano oggetto di molti esercizi di routine.

**Secondo quesito**

4. Lo svolgimento di questo secondo quesito richiede che il candidato abbia delle conoscenze relative alla funzione esponenziale ed al calcolo delle primitive di funzioni che si esprimono mediante l'esponenziale. Ciò avrebbe potuto provocare qualche difficoltà a qualche candidato, perché non sempre gli insegnanti riescono a svolgere questi argomenti in modo completo.
L'enunciato del quesito parla di un «punto P libero di muoversi lungo l'asse delle x»; pensiamo che l'interpretazione più immediata e naturale (e coerente con il contesto) di questa frase sia quella che conduce ad immaginare il punto vincolato all'asse delle x, e libero di muoversi su quello senza attrito; e che la forza sia diretta come questo asse. In queste ipotesi ha senso prendere in considerazione anche il segno della funzione f(x) dell'enunciato; tale segno indica se il vettore che rappresenta la forza ha senso concorde oppure contrario a quello del vettore OP. Nel caso in esame si ha quindi che la forza che si esercita sul punto P è attrattiva verso il punto O quando la coordinata x di P soddisfi alle relazioni:

$$-\sqrt{2}<x<0 \quad\text{oppure}\quad 0<x<\sqrt{2},$$

ed è repulsiva quando si abbia:

$$x<-\sqrt{2} \quad\text{oppure}\quad x>\sqrt{2}.$$

Queste convenzioni sono abituali nella meccanica razionale; ma sarebbe tuttavia forse stato desiderabile che queste informazioni fossero state date più ampiamente nell'enunciato del quesito.
Per comodità di scrittura, in questo paragrafo utilizzeremo il simbolo «exp(x)» (del resto di uso corrente) per indicare la funzione esponenziale.
Una prima fase dello svolgimento conduce a cercare la primitiva della funzione f(x) che compare nell'enunciato; questa ricerca può essere condotta a termine o con la procedura di integrazione per parti, oppure con una procedura di identificazione, spesso usata in problemi come questo. Precisamente ponendo:

(18) $G(x)=(a\cdot x^2+b\cdot x+c)\cdot \exp(-x^2)+k,$

calcolando la derivata G' ed identificando questa derivata con la funzione $-f(x)$. Si ottengono così le condizioni:

(19) $-2a=-2;\ -2b=0;\ -2c+2a=4,$

dalle quali si ottengono i valori:

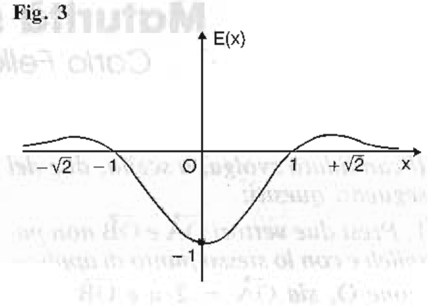
(20) $a=1;\ b=0;\ c=-1,$

che precisano in parte la espressione di E(x); l'ulteriore condizione $E(0)=-1$ conduce a porre poi $k=0$, e quindi ad ottenere:

(21) $E(x) = (x^2-1)\cdot\exp(-x^2).$

La derivata prima della funzione E(x) è ovviamente data dalla funzione $-f(x)$. Questa ha le sue radici per $x=0$ ed $x=\pm\sqrt{2}$.
Il calcolo della derivata seconda di E, e la determinazione del suo segno in corrispondenza di questi valori conduce a concludere che il primo è un minimo e gli altri due sono massimi (locali). In corrispondenza a questi due ultimi valori di x la funzione E assume il valore: $\exp(-2) = 0.135...$ Si ha poi che la funzione E(x) tende asintoticamente a zero, per $|x|\to\infty$, in conseguenza di note proprietà della funzione esponenziale. L'andamento del grafico della funzione E(x) è dato dalla *Fig. 3*, e si determina senza molta difficoltà, tenendo anche conto del fatto che la curva è ovviamente simmetrica rispetto all'asse delle ordinate.

**Fig. 3**




Abbiamo già fatto qualche considerazione a proposito di questo quesito; qui vorremmo aggiungere che esso ci si presenta come un timido tentativo di introdurre un poco di interdisciplinarità nei temi scritti di maturità, con la considerazione di alcune interpretazioni fisiche di certi strumenti matematici.

**Terzo quesito**

5. Fissiamo nel piano un sistema di coordinate cartesiane ortogonali X,Y, avente la sua origine nel centro O della circonferenza $\gamma$, scegliendo l'asse delle ascisse in modo che la semiretta s coincida con la sua parte positiva. La circonferenza $\gamma$ è rappresentata dall'equazione:

(22) $X^2+Y^2=1,$

ed al punto P daremo l'ascissa a, con la condizione, imposta dal problema:

(23) $a>1$

Nel seguito porremo anche:

(24) $a=1+x,\quad \text{con}\quad x>0.$

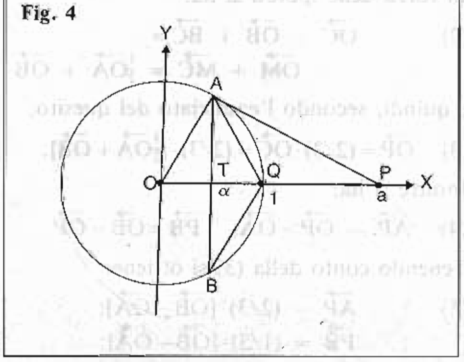
Chiamiamo T l'intersezione dell'asse delle ascisse con la corda AB (*Fig. 4*). Per un noto teorema di Euclide, l'ascissa di T vale $1/a$; porremo per comodità:

(25) $1/a=\alpha.$

Dall'equazione (22) si trae che la lunghezza della corda AB vale:

(26) $AB=2\cdot\sqrt{1-\alpha^2}.$

**Fig. 4**



Inoltre le due corde AQ e BQ sono uguali tra loro, per ovvie ragioni di simmetria; e dal teorema di Pitagora, applicato al triangolo TQA, si ottiene:

$$(27)\quad AQ = \sqrt{(1-\alpha)^2 + (1-\alpha^2)} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\alpha}.$$

Quindi per la funzione $k^2$ si ottiene l'espressione:

$$(28)\qquad k^2 = 2\cdot(1-\alpha)/(1-\alpha^2) = 2/(1+\alpha).$$

Dalle (23) e (24) si ha che al tendere di x ad $\infty$ lo stesso avviene anche per a, e per la (25) si ha allora che $\alpha$ tende a zero. Di qui si trae immediatamente che il limite di $k^2$ per x che tende ad $\infty$ è 2.
Quindi il limite richiesto per la funzione k è $\sqrt{2}$.
Sostituendo nella (28) per le (24) e (25) si ottiene:

$$(29)\qquad k^2 = 2\cdot(x+1)/(x+2).$$

Per svolgere l'ultima parte del terzo quesito è verosimile che si debba tralasciare di prendere in considerazione il significato geometrico della funzione $k^2$, data dalla (29), e quindi che si debba trascurare la limitazione (24) che si fonda su tale significato, ed invece si debba considerare la funzione $k^2$ per ogni valore reale in cui hanno senso le operazioni algebriche indicate nella (29), cioè per ogni valore di x diverso da 2.
Fissiamo quindi nel piano un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x, y, e studiamo la funzione:

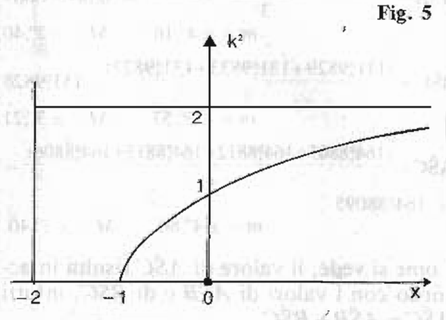
$$(30)\qquad f(x) = 2\cdot(x+1)/(x+2) = 2\cdot\{1 - 1/(x+2)\}.$$

La grafica della (30) è una iperbole equilatera, i cui asintoti paralleli agli assi coordinati, sono le rette di equazioni:

$$(31)\qquad x+2=0;\quad y-2=0.$$

La regione del piano delimitata dalla curva e dagli assi (*Fig. 5*) è chiaramente quella corrispondente ai valori di x soddisfacenti alle limitazioni:

Fig. 5




$$(32)\qquad -1 \le x \le 0.$$

Quindi la misura dell'area di questa regione è data dal valore dell'integrale definito;

$$\int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx = 2 - 2\cdot\log 2 = 0.6137\ldots$$

Osserviamo che anche questo quesito non offre grandi difficoltà, né concettuali né di calcolo.

**6. Vorremmo aggiungere qualche osservazione a quelle** che già abbiamo fatto nel corso delle pagine precedenti. In varie sedi, ed in varie occasioni, abbiamo espresso la convinzione che il Ministero della P.I., attraverso i quesiti proposti negli esami di maturità, possa influire sulla didattica della matematica, e quindi possa anche influire sulla manualistica corrente di questa materia; infatti se per anni ed anni, senza eccezioni, i quesiti proposti agli esami scritti sono di un certo tipo, in modo quasi naturale gli insegnanti si adeguano, nella loro opera didattica, a preparare gli alunni a risolvere quesiti di quel tipo; e la manualistica corrente si adegua nel dare della matematica una determinata immagine. Immagine che non sempre è giusta e soddisfacente, ma che viene giudicata sufficiente per il superamento degli esami. D'altra parte si potrebbe osservare che la preoccupazione per il superamento degli esami appare eccessiva, perché da decenni ormai la percentuale dei promossi alle varie maturità supera costantemente il 99%.
Ciò potrebbe forse esaltare un ottimista, il quale troverebbe naturale il fatto che, nel Paese di Leonardo da Vinci, i suoi nipotini abbiano una resa scolastica di questo tipo; ma rattristerebbe qualche pessimista, o anche solo qualcuno che conosce il livello della nostra scuola, oppure deve constatare l'esistenza di vistosi casi di ignoranza e di incultura presso i maturi (ed anche presso i laureati).
Date queste premesse, l'impresa di commentare ulteriormente i temi scritti di matematica proposti per la maturità scientifica appare, oltre che difficile, anche quasi inutile, fino ai limiti del patetico. Non riusciamo infatti ad immaginare un Ministro della P.I. il quale (indipendentemente dal sesso a cui appartiene) abbia il coraggio di riportare le prove di maturità a quel livello di serietà che dovrebbero avere; ed abbia il coraggio di pretendere che nella scuola si formino i giovani allo studio serio, assiduo, impegnato, perseverante e quindi talvolta anche faticoso. Insomma il coraggio di pretendere che la scuola prepari i futuri cittadini alla serietà dell'impegno nel proprio lavoro.

**Carlo Felice Manara**
*Università Statale di Milano*